

# Inhalt

<b>Inhalt</b> .....	1
<b>Einleitung</b> .....	2
Geschichte der komplexen Zahlen .....	2
<b>Rechnen mit komplexen Zahlen</b> .....	4
Darstellung komplexer Zahlen .....	4
Gleichheit zweier komplexer Zahlen .....	5
Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene .....	5
Addition und Subtraktion.....	6
Multiplikation .....	8
Potenzieren .....	11
<b>Komplexe Zahlen in der Elektrotechnik</b> .....	12
Anwendungsbeispiele .....	14
<b>Anhang</b> .....	16
Glossar .....	16
Quellen.....	16

# Einleitung

## Geschichte der komplexen Zahlen

Die Geschichte der komplexen Zahlen basiert auf der Geschichte der Zahlen und Zahlzeichen die mit den ältesten Kulturgütern des Menschen gehören. Bereits in der Steinzeit wurden Kerben und Marken auf Waffen oder Höhlenwänden zur Bezeichnung von Anzahlen verwendet.

Die Kulturen der Ägypter und Babylonier um 2000 bis 1000 v.Chr. hatten bereits ausgeklügelte Zahlensysteme, in denen die Grundrechenarten im wesentlichen ausführbar sind. Besonders die Babylonier entwickelten komplizierte Rechentechniken, wie zum Beispiel das Lösungsverfahren quadratischer Gleichungen durch quadratische Ergänzung.

Bei den griechischen Mathematikern um 500 v.Chr. bekamen die Zahlen auch eine philosophische und weltanschauliche Bedeutung. Man vertrat die Lehre, dass die Zahl der Urgrund des Kosmos sei und dieser durch die Zahlenverhältnisse regiert werde. Dabei wurden nur die natürlichen Zahlen mit Ausnahme der Eins als Zahlen aufgefasst. Brüche und irrationale Zahlen wurden als Verhältnisse von Zahlen bzw. als Verhältnis von Strecken in der Geometrie behandelt. Durch *Euklid (um 300 v.Chr.)* ist uns die sogenannte Proportionenlehre des *Eudoxos von Knidos (408 - 355? v.Chr.)* überliefert, in der gezeigt wird, wie mit solchen Verhältnissen zu rechnen ist. Wir können dies heute als Rechengesetze für die reellen Zahlen deuten.

Unsere heutige Zahlenschreibweise und die Ziffern von 0 bis 9 stammen aus der indischen Kultur zwischen 300 v.Chr. und 600 n.Chr., von wo sie über die Araber ins Abendland gelangten. Was allerdings verwunderlich erscheint, ist dass die Inder im Gegensatz zu den Arabern auch negative Zahlen kannten. Die berühmten Rechenbücher von *Adam Riese (1492?-1559)* und *Michael Stifel (1487-1567)*, in denen die indischen Rechentechniken wiederauflebten, trugen mit dazu bei, dass die Mathematiker des 16. und 17. Jahrhunderts auch mit negativen Zahlen umzugehen verstanden. Als Lösungen von Gleichungen wurden sie jedoch nicht anerkannt.

Eine präzise Definition des Zahlenbegriffs wurde schließlich erst im 19. Jahrhundert mit Hilfe der Mengenlehre gegeben. Dabei wirkten vor allem drei Europäische Mathematiker, darunter die beiden deutschen *Georg Cantor (1845-1918)* und *Richard Dedekind (1831-1916)* mit.

Wurde auch der Begriff der reellen Zahlen erst so spät exakt festgelegt, so traten reelle Zahlen doch bereits früh auf: die Kreiszahl  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$  etc.

Im Vergleich zu dieser Geschichte sind die komplexen Zahlen wesentlich jünger. Imaginäre Zahlen traten zuerst im 16. Jahrhundert im Zusammenhang mit Lösungen von Gleichungen auf. Es wurden dabei die Fälle unterschieden, in denen die Lösungsformeln reelle Zahlen liefern (mögliche Gleichungen). Da aber auch in dem unmöglichen Fall formal Lösungen als Rechenausdrücke existierten, die nur als Zahlen keine Bedeutung hatten, da zum Beispiel negative Wurzeln darin auftreten, nannte man solche Lösungen imaginär.

Der Mathematiker Rene Descartes äußert sich wie folgt zu den komplexen Zahlen:

„Endlich bemerken wir, dass sowohl die positiven wie auch negativen Wurzeln einer Gleichung nicht immer reell, sondern manchmal nur imaginär sind, d.h. man kann sich zwar alle Male bei jeder beliebigen Gleichung so viele Wurzeln, wie ich angeben habe, vorstellen, aber manchmal gibt es keine Größen, die den so vorgestellten entsprechen“

Erstaunlich war nun jedoch, dass mit diesen imaginären Größen gerechnet werden konnte und die Ergebnisse dieser Rechnungen sinnvolle reelle Lösungen sein konnten. Von dieser Erkenntnis waren die damaligen Mathematiker ziemlich beeindruckt und überrascht. Obwohl mit den imaginären Größen sinnvoll gerechnet werden konnte, scheiterte die Anerkennung dieser Größen als Zahlen weiterhin daran, dass sich kein Mathematiker die Wurzel aus einer negativen Zahl vorstellen konnte. Ein Schweizer Buchhalter und ein norwegischer Feldmesser, beide Laien-Mathematiker, gaben unabhängig voneinander die geometrische Deutung der komplexen Zahlen als Punkte der Ebene. Ihre Arbeiten blieben jedoch unbeachtet. Erst der Mathematiker Carl Friedrich Gauß (1777-1855) verschaffte den komplexen Zahlen die volle Anerkennung. Er benutzt die Darstellung der komplexen Zahlen als Punkte in der Ebene mit den geometrisch eingeführten Rechenoperationen, wie wir sie hier kennen gelernt haben. Auf ihn geht auch die Bezeichnung **komplexe Zahlen** zurück. Jetzt erst, nachdem man diese einfache Deutung der komplexen Zahlen vor Augen hatte, waren sie nicht länger geheimnisumwoben, und an ihrer Existenz wurde nicht mehr gezweifelt.

Außer im Zusammenhang mit dem Fundamentalsatz der Algebra kommt den komplexen Zahlen vor allem in vielen weiteren Teilen der Algebra, in der Zahlentheorie und der Analysis große Bedeutung zu. Aus der modernen Physik sind die komplexen Zahlen nicht mehr wegzudenken. Sie spielen unter anderem bei der mathematischen Beschreibung in der Optik, der Elektrodynamik und der Quantenmechanik eine wichtige Rolle. So haben sich die komplexen Zahlen auch außerhalb der reinen Mathematik in den Anwendungsgebieten ihren Platz erobert.

Durch den Fundamentalsatz wird das Problem der Existenz von Lösungen zu Gleichungen beliebigen Grades vollständig in  $\mathbb{C}$  gelöst. Ist  $\mathbb{C}$  damit nun der größte sinnvolle Zahlenbereich, oder lassen sich Gründe angeben, auch  $\mathbb{C}$  noch zu erweitern?

In der Tat hat sich die moderne Mathematik mit  $\mathbb{C}$  nicht zufrieden gegeben. Es wurden andere Erweiterungen von  $\mathbb{R}$  und Erweiterungen von  $\mathbb{C}$  konstruiert, in denen es unendlich kleine und unendlich große Elemente gibt. Diese sogenannten Non-Standard Zahlenbereiche entwickelte der Mathematiker *Abraham Robinson* (1918-1974). In ihnen sind Probleme hauptsächlich aus dem Gebiet der Differential- und Integralrechnung leichter zu lösen, die in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  schwieriger zu fassen sind.

Gauß: „So wie man sich das ganze Reich aller reeller Größen durch die unendliche gerade Linie denken kann, so kann man das *ganze* Reich aller Größen, reeller und imaginärer Größen sich durch eine unendliche Ebene sinnlich machen, worin jeder Punkt, durch die Abzisse =  $a$ , die Ordinate =  $b$  bestimmt, die Größe  $a+bi$  gleichsam repräsentiert.“

Quellen [1 ;2]

## Rechnen mit komplexen Zahlen

Nachdem auf die Entstehungsgeschichte und die Notwendigkeit komplexer Zahlen eingegangen wurde, soll nun im Bereich der komplexen Zahlen gerechnet werden. Bevor wir jedoch die einzelnen Rechenoperationen kennen lernen, müssen grundlegende Zusammenhänge bzw. Gesetzmäßigkeiten klar sein. Beginnen möchte ich mit verschiedenen Formen der Darstellung komplexer Zahlen.

### Darstellung komplexer Zahlen

Wir unterscheiden zunächst zwischen der arithmetischen und der goniometrischen Form.

a) arithmetische Form:  $z = a + bj$

Dabei stellen  $a$  den Real- und  $b$  den Imaginärteil dar.

b) goniometrische Form:  $z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) = r \cos \varphi + rj \sin \varphi$

Es wird der Parameter  $r$  als Betrag und  $\varphi$  als das Argument der komplexen Zahl  $z$  bezeichnet, wobei stets  $r \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 360^\circ$  gilt. Aus dieser Schreibweise lässt sich ableiten, dass

$$\begin{aligned} & a = r \cos \varphi \\ \text{und} & b = r \sin \varphi \end{aligned}$$

folgen.

Anhand von Beispielen soll nun das Umwandeln dieser Formen erläutert werden.

$$a = r \cos \varphi = 7 \cos 60^\circ = 7 \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$b = r \sin \varphi = 7 \sin 60^\circ = 7 \frac{1}{2} \sqrt{3} = \frac{7}{2} \sqrt{3}$$

#### **Beispiel 1:**

Wie heißt die arithmetische Form der komplexen Zahl  $z = 7 (\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ)$ ?

Damit lautet die arithmetische Form:

$$z = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} \sqrt{3} j$$

#### **Beispiel 2:**

Umgekehrt kann interessieren, wie die goniometrische Darstellung der komplexen Zahl  $z = -2 + 2\sqrt{3}j$  lautet.

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$$

Aus dem Tabellenbuch oder mit Hilfe des Taschenrechners ermittelt man nun aus dem Tangens das Argument  $\varphi^* = -60^\circ$ . Das hieße, der Vektor der komplexen Zahl läge im 4. Quadranten. Vergleicht man das Resultat jedoch mit den Parametern  $a$  und  $b$  der arithmetischen Darstellung, stellen wir einen Widerspruch fest, denn der Vektor von  $z$  muss im 2. Quadranten liegen. Da die Tangensfunktion aller  $180^\circ$  periodisch verläuft, ergibt sich das Argument:

$$\varphi = \varphi^* + 180^\circ = -60^\circ + 180^\circ = 120^\circ$$

Somit lautet die goniometrische Darstellung:  $z = 4(\cos 120^\circ + j \sin 120^\circ)$ .

## Gleichheit zweier komplexer Zahlen

**Definition:** Zwei komplexe Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  sind genau dann gleich, wenn sie in Real- und Imaginärteil übereinstimmen.

Nachweis: Wenn

$$z_1 = a_1 + b_1 j \text{ und } z_2 = a_2 + b_2 j,$$

dann muss bei  $z_1 = z_2$  gelten:

$$a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2.$$

Denn aus

$$a_1 + b_1 j = a_2 + b_2 j$$

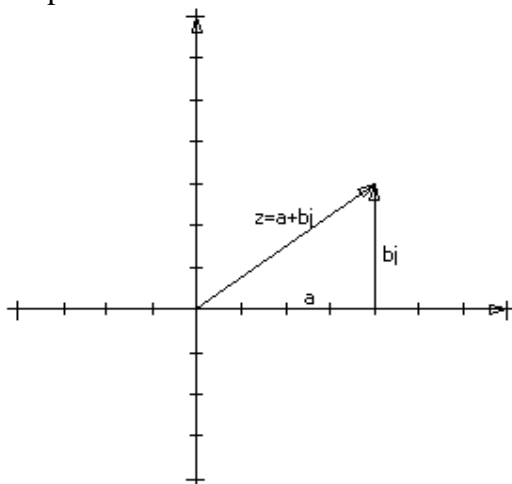
folgt

$$a_1 - a_2 = b_2 j - b_1 j.$$

Wenn  $b_1 \neq b_2$  wäre, dann könnte man durch  $b_2 - b_1$  dividieren und schafft für  $j$  die Darstellung  $(a_1 - a_2)/(b_2 - b_1)$ , was einer reellen Zahl entspricht. Das hieße,  $j$  wäre selbst reell, was aber unmöglich ist.

## Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene

Darstellen lässt sich jede komplexe Zahl in der Gaußschen Zahlenebene. Und zwar entspricht eine beliebige komplexe Zahl  $z$  genau einem Punkt in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Abszisse stellt dabei den Realteil, die Ordinate den Imaginärteil der komplexen Zahl dar.

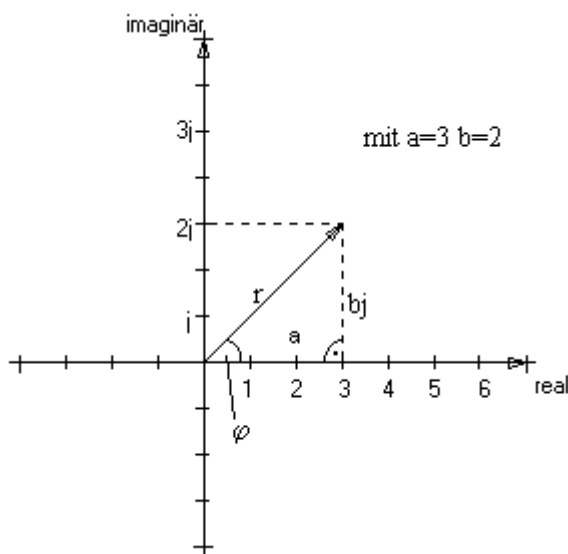


Es handelt sich hierbei um eine sogenannte eineindeutige Abbildung der komplexen Zahl in der Gaußsche Zahlenebene, da einerseits genau eine komplexe Zahl auf einen Punkt der Zahlenebene abgebildet werden kann. Umgekehrt ist jeder Punkt genau einer komplexen Zahl zugeordnet. Allerdings ist es nicht möglich, eine Ordnungsrelation wie zum Beispiel das Kleiner- oder Größersein geometrisch zu erklären. Die komplexen Zahlen sind nämlich nicht wie reelle Zahlen auf einem Zahlenstrahl, sondern in einer Ebene dargestellt. Somit kann auch nicht von positiven und negativen komplexen Zahlen sprechen. Sinnvoll ist allerdings die Angabe des absoluten Betrags einer komplexen Zahl, der sich aus

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ mit } r \geq 0$$

ergibt.

Unter ihm versteht man in Analogie zu den reellen Zahlen den Abstand des Bildpunktes vom Nullpunkt der Zahlenebene zur Pfeilspitze des Imaginärteils. Für die geometrische Darstellung von Rechenoperationen ist es, wie wir später noch sehen, günstig, die komplexe Zahl nicht durch Punkte, sondern durch Vektoren darzustellen. Daher kann man die komplexe Zahl in die senkrecht aufeinanderstehenden Vektorkomponenten  $a$  (Realteil) und  $b$  (Imaginärteil) zerlegen. Der Winkel zwischen der Abszisse und dem Vektor  $z$  ist das bereits erwähnte Argument  $\varphi$ .



## Addition und Subtraktion

Für die Addition und somit auch die Subtraktion von komplexen Zahlen gilt

$$z_3 = z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 j) \pm (a_2 + b_2 j)$$

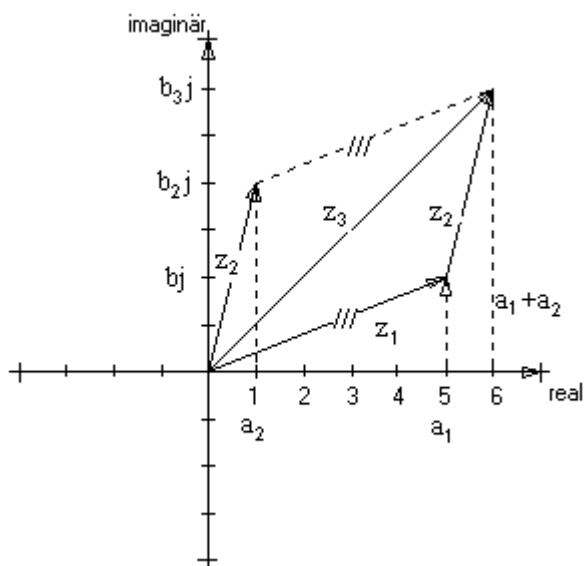
$$z_3 = a_3 + b_3 j = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) j$$

Man addiert bzw. subtrahiert zwei komplexe Zahlen, indem man ihre Real- und Imaginärteile addiert bzw. subtrahiert.

### Beispiel 1:

$$(5 + 2j) + (1 + 4j) = (5 + 1) + (2 + 4)j = 6 + 6j$$

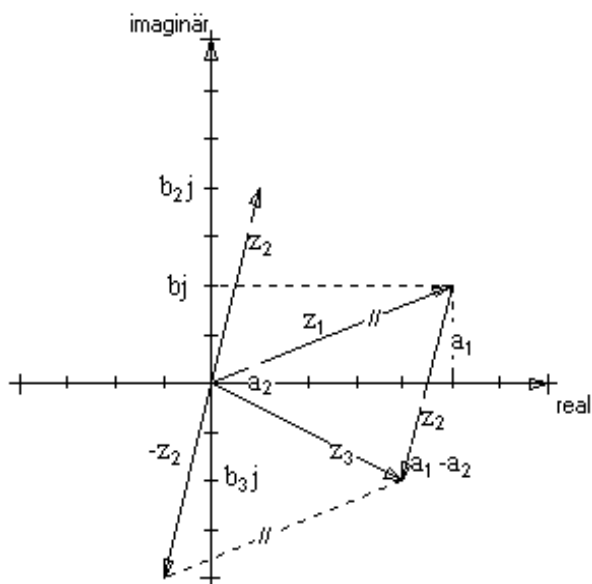
In der Gaußschen Zahlenebene lässt sich diese Rechenoperation wie folgt darstellen.



Um die Summe zweier komplexer Zahlen geometrisch zu bilden, muss man den Anfangspunkt des Vektors eines Summanden in die Pfeilspitze des anderen Summanden parallel verschieben. Die Summe wird dann durch den Vektor dargestellt, der im Koordinatenursprung beginnt und an der Spitze des parallel verschobenen Vektors endet.

Beispiel 2:  $(7 - 5j) - (3 + 2j) = (7 - 3) + (-5 - 2)j = 4 - 7j$

Geometrisch stellt sich diese Subtraktion wie folgt dar:



Man bildet zuerst den inversen Vektor des Subtrahenden. Dieser wird dann zum Minuenden addiert. Die Differenz ergibt sich schließlich als Vektor zwischen dem Koordinatenursprung und der Spitze des Vektors  $-z_2$ .

## Multiplikation

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen erfolgt nach dem Distributivgesetz, das wie folgt lautet:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a_1 + b_1 j) \cdot (a_2 + b_2 j) = a_2 a_1 + a_1 b_2 j + b_1 a_2 + b_1 b_2 j^2$$

Für das Produkt komplexer Zahlen ergibt sich somit:

Berücksichtigt man, dass  $j^2 = -1$  ist und fasst außerdem gleichartige Glieder zusammen, dann vereinfacht sich die Vorschrift zu:

$$a_1 a_2 + a_1 b_2 j + b_1 a_2 - b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) j$$

Beispiel 1:

$$(3 + 6j)(5 + 7j) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 7j + 6j \cdot 5 + 6j \cdot 7j$$

$$= 15 + 21j + 30j + 42j^2$$

$$= 15 + 51j - 42 = 27 - 51j$$

Beispiel 2:

$$(2 + 3j)(3 - 4j)(4 + 2j) = (6 - 8j + 9j - 12j^2)(4 + 2j) =$$

$$24 + 12j - 32j - 16j^2 + 36j + 18j^2 - 48j^2 - 24j^3$$

Sind wie in diesem Beispiel Produkte mit 3 und mehr Faktoren zu bilden, dann werden die Potenzen imaginärer Einheiten benötigt. Wir erhalten sie, indem wir die jeweils vorangegangene Potenz mit  $j$  multiplizieren.

$$j^1 = j$$

$$j^2 = -1$$

$$j^3 = j^2 \cdot j = -1 \cdot j = -j$$

$$j^4 = j^3 \cdot j = -j \cdot j = -j^2 = 1$$

$$j^5 = j^4 \cdot j = 1 \cdot j = j$$

$$j^6 = j^5 \cdot j = j \cdot j = -1$$

*usw.*

Wir sehen, dass sich die Folge der Potenzen von  $j$  periodisch mit den Zahlen

$j, -1, j, 1$

wechseln. Somit erhalten wir für unser Beispiel

$$24 + 16j - 46j^2 - 24j^3 = 24 + 16j + 46 + 24j = 70 + 40j$$

## Division

Bei der Division zweier komplexer Zahlen nutzt man die binomische Formel

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

wobei zunächst der Quotient mit  $a_2 - b_2 j$  zu erweitern ist.

Damit ergibt sich:

$$\frac{a_1 + b_1 j}{a_2 + b_2 j} = \frac{(a_1 + b_1 j) \cdot (a_2 - b_2 j)}{(a_2 + b_2 j) \cdot (a_2 - b_2 j)} = \frac{a_1 a_2 - b_1 b_2 j + a_2 b_1 j - a_1 b_2 j}{a_2^2 - b_2^2 j}$$

Unter Berücksichtigung von  $j^2 = -1$  und Zusammenfassen gleichartiger Glieder erhalten wir den Term

$$\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_2 b_1 - a_1 b_2) j}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} j$$

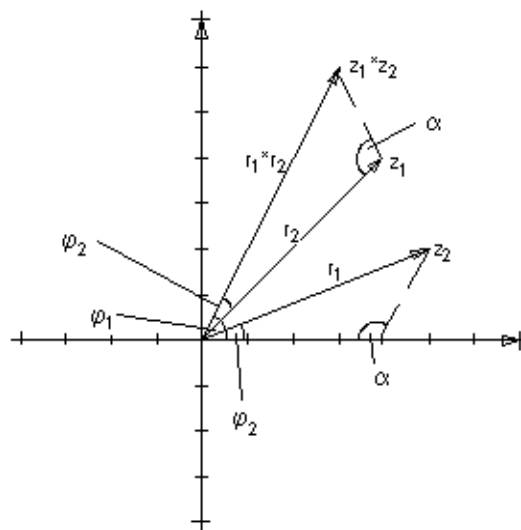
Beispiel:

$$\frac{2 + 3j}{4 - 5j} = \frac{(2 + 3j)(4 + 5j)}{(4 - 5j)(4 + 5j)} = \frac{8 + 10j + 12j + 15j^2}{16 - 20j - 20j + 25j^2} = \frac{8 + 10j + 12j - 15}{16 - 20j - 20j - 25} = \frac{-7 + 22j}{-9} = \frac{7}{9} - \frac{22}{9} j$$

Aus diesem Beispiel erkennen wir, dass die Ausführbarkeit der Division von komplexen Zahlen an eine grundlegende Voraussetzung gebunden ist. Wie bei Funktionsgleichungen, die uns schon aus dem Unterricht bekannt sind, darf der Nenner des Quotienten nicht den Wert 0 annehmen. Das heißt, dass a und b nicht gleichzeitig 0 sein können.

Wie Addition bzw. Subtraktion von komplexen Zahlen lassen sich auch Multiplikation und Division in der Gaußsche Ebene graphisch darstellen. Dabei geht man vorteilhaft von der goniometrischen Form aus. Die Vorschrift für die Multiplikation lautet - ohne hier näher auf die Herleitung einzugehen -

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

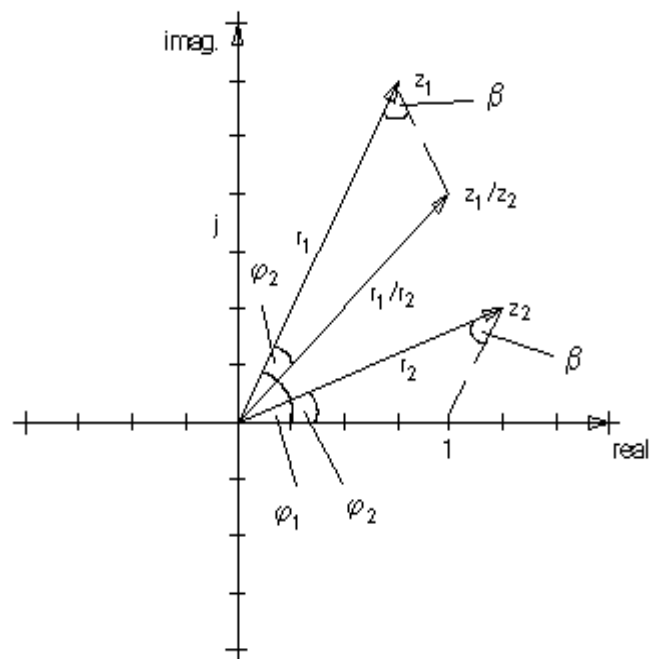


Vergleicht man die Form der Zahl  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)$  mit obigem Produkt, dann erkennt man, dass es sich geometrisch um eine Konstruktion ähnlicher Dreiecke handelt. Dabei wird der Vektor  $z_1$  um den Winkel  $\varphi_1$  gedreht und um das Verhältnis  $r_2 : 1$  gestreckt. Bei der Konstruktion zeichnet man zuerst die Vektoren der komplexen Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  in die Zahlenebene. Danach verbindet man die Pfeilspitze von  $z_2$  mit dem Punkt  $(1/0)$ , der auf der Abszisse liegt. Damit ergibt sich ein Winkel  $\alpha$  zwischen Abszisse und Verbindungslinie. Diesen Winkel trägt man um die Pfeilspitze des Vektors  $z_1$  an. Anschließend wird die Wirkungslinie des Vektors  $z_1$  um den Winkel  $\varphi_2$  gedreht. Im Schnittpunkt zwischen dem freien Winkelschenkel von  $\alpha$  und der um  $\varphi_2$  gedrehten Wirkungslinie ergibt sich die Lage der Pfeilspitze des Produktes beider komplexer Zahlen. Betrachtet man beide Dreiecke, dann erkennt man ihre Ähnlichkeit, die aus der Drehstreckung resultiert.

Da die Division die Umkehrung der Multiplikation darstellt, ist ihr Bildungsgesetz in goniometrischer Form leicht einzusehen:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Daraus ergibt sich folgende Konstruktion:



Man zeichnet zuerst die Vektoren der beiden Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  in die Zahlenebene ein. Danach verbindet man die Pfeilspitze von  $z_2$  mit dem Punkt  $(1/0)$  auf der Abszisse. Damit ergibt sich ein Winkel  $\beta$  zwischen  $r_2$  und der Verbindungslinie. Dieser Winkel wird anschließend um die Pfeilspitze von  $z_1$  angetragen. Die Richtung von  $z_1$  wird um den negativen Winkel  $\varphi_2$  gedreht und ergibt so einen Schnittpunkt mit dem freien Winkelschenkel von  $\beta$ . In diesem Schnittpunkt liegt die Pfeilspitze des Quotientenvektors.

Wir erkennen wiederum eine Streckung von  $z_1$  um den Faktor  $\frac{1}{r_2}$  und eine Drehung um den Winkel  $-\varphi_2$ .

## Potenzieren

Als letzte Rechenoperation soll auf das Potenzieren eingegangen werden. Aus der Überlegung heraus, dass

$$z^2 = z \cdot z$$

gilt, wäre das Quadrat einer komplexen Zahl nach Bildungsvorschrift für Produkte aus

$$z \cdot z = r \cdot r [\cos(\varphi + \varphi) + j \sin(\varphi + \varphi)] = r^2 (\cos 2\varphi + j \sin 2\varphi)$$

zu bestimmen. Damit drängt sich folgende allgemeine Bildungsvorschrift für Potenzen auf:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi) \text{ mit } n \in \mathbb{N}.$$

Ihre Gültigkeit soll mit Hilfe der vollständigen Induktion bewiesen werden.

$$z^0 = r^0 (\cos 0\varphi + j \sin 0\varphi) \Rightarrow 1 = 1$$

$$z^1 = r^1 (\cos 1\varphi + j \sin 1\varphi) \Rightarrow z = r (\cos \varphi + j \sin \varphi)$$

$$z^2 = r^2 (\cos 2\varphi + j \sin 2\varphi)$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi)$$

$$z^{n+1} = z^n \cdot z = r^n \cdot r [\cos(n\varphi + \varphi) + j \sin(n\varphi + \varphi)]$$

$$\Rightarrow z^{n+1} = r^{n+1} [\cos(n+1)\varphi + j \sin(n+1)\varphi]$$

Selbst bei negativen Exponenten  $n$  kann diese Bildungsvorschrift angewendet werden:

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1(\cos 0 + j \sin 0)}{r^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi)} = r^{-n} [\cos(0 - n\varphi) + j \sin(0 - n\varphi)] = r^{-n} [\cos(-n\varphi) + j \sin(-n\varphi)]$$

Beispiel: Berechne die Potenz  $(3 - 6j)^4$ !

Zuerst bringt man die komplexe Zahl  $z = 3 - 6j$  in die goniometrische Form.

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} = \frac{-6}{3} = -2$$

$$\varphi = -63,435^\circ + 180^\circ = 116,565^\circ$$

Der Vektor der komplexen Zahl  $z$  muss im zweiten Quadranten liegen.

$$z = \sqrt{45}^4 (\cos(4 \cdot 116,565^\circ) + j \sin(4 \cdot 116,565^\circ)) = 2025 (\cos 466,26^\circ + j \sin 466,26^\circ) \\ \approx -567 + 1944j$$

Damit wären die wichtigsten Rechenoperationen für komplexe Zahlen erläutert, und wir können zu praktischen Anwendungen übergehen.

## Komplexe Zahlen in der Elektrotechnik

In der E-Technik findet die komplexe Rechnung dort Anwendung, wo man mit zeitveränderlichen Grössen arbeitet (z.B. Wechsel- und Drehstromsysteme).

Da aber  $i$  bereits für den zeitveränderlichen Strom verwendet wird, wird der  $Im$  Teil mit  $j$  gekennzeichnet. Komplexe Grössen erkennt man an unterstrichenen Grossbuchstaben, nicht unterstrichene Grossbuchstaben kennzeichnen den Momentanwert.

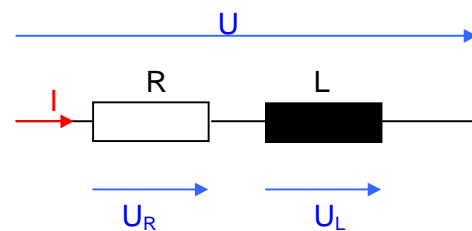
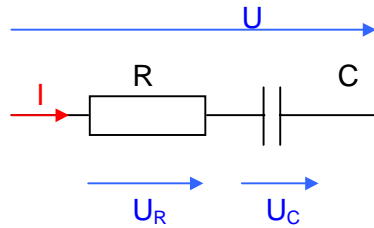
Wechselstrom bezeichnet die zeitlich periodische Änderung von Strom oder Spannung. Bei Elektrogeräten im Privatbereich und der Haustechnik ist das der einphasige Wechselstrom mit 230 Volt (V) und 50 Hertz (Hz) (z.B. USA: 60 Hz). Geräteintern können andere Frequenzen herrschen (z. B. Taktrate im Computer).

In der Energietechnik und bei Industrieanlagen wird Energie mit dreiphasigem Wechselstrom (Drehstrom, 50Hz) erzeugt, transportiert, verteilt (Transformatoren in Umspannwerken: z.B. von 20kV auf 400V) und verbraucht.

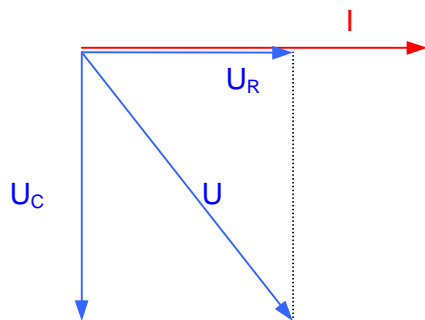
Kapazitäten (Kondensatoren) und Induktivitäten (Spulen) sind frequenzabhängige Grössen. Daher muss ihr Einfluss mitberücksichtigt werden.

Beispiel:

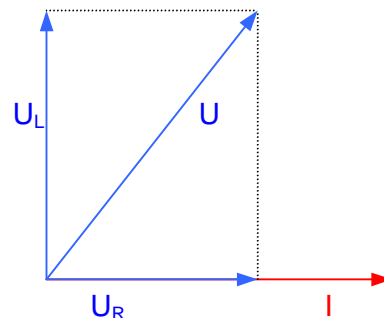
Reihenschaltung von ohmschem Widerstand  $R$  mit Kondensator  $C$  und Spule  $L$



Zeigerbild:



Zeigerbild:



Strom und Spannung am ohmschen Widerstand sind immer in Phase, an der Kapazität eilt die Spannung dem Strom um  $90^\circ$  nach und an der Induktivität eilt die Spannung dem Strom um  $90^\circ$  voraus.

Der kapazitive Widerstand  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  und der induktive Widerstand  $X_L = \omega L$  werden für die Bestimmung des jeweiligen Gesamtwiderstandes als imaginär angesetzt.

Zeigerbilder für die Widerstände:



Die komplexen Gesamtwiderstände (Impedanzen, Scheinwiderstände) ergeben sich zu:

$$\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\underline{Z}_2 = R + j\omega L$$

Zur Berechnung von Betrag und Phasenwinkel finden die Formeln aus 1. Anwendung. Grund für diese Vorgehensweise ist, dass aufgrund der Phasenverschiebung geometrisch addiert werden muss; der Wirkanteil (R) und der Blindanteil (X) sind für weitere Betrachtungen aufgeschlüsselt.

So wird z.B. bei der Berechnung der Leistung ( $P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$ ) unterschieden zwischen:

$$\text{Scheinleistung: } \underline{S} = I^2 \cdot \underline{Z} = \frac{U^2}{\underline{Z}} \text{ (gesamte umgesetzte Leistung)}$$

$$\text{Wirkleistung: } P = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} \text{ (an Wirkanteilen umgesetzte Leistung)}$$

$$\text{Blindleistung: } Q = I^2 \cdot X = \frac{U^2}{X} \text{ (an Blindanteilen umgesetzte Leistung)}$$

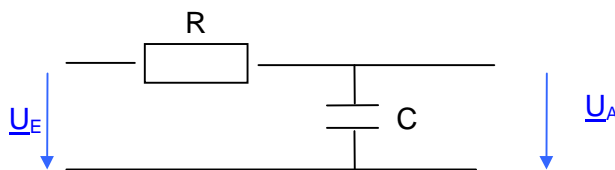
Für Parallelschaltungen erfolgen die Betrachtungen analog, nur dass sich die Ströme aufteilen und die Spannung als Bezug dient.

## Anwendungsbeispiele

In der Schaltungstechnik finden sich Spulen (z.B. als Drosseln) und Kondensatoren (z.B. zur Spannungsglättung) mit ohmschen Widerständen in Netzwerken. Das Aufstellen eines Zeigerbildes einer solchen Schaltung gestaltet entsprechend aufwendig.

Z.B. ist es in der Nachrichtentechnik wichtig, das Verhalten von Schaltungen bei verschiedenen Frequenzen zu kennen. Eine Aussage liefert z.B. das Bode-Diagramm. Es besteht im Prinzip aus der Betrags- und Phasenkurve einer komplexen Zahl, aufgetragen über der (Kreis-) Frequenz  $\omega$  ( $=2\pi f$ ):

Beispiel : RC-Tiefpass



Der Frequenzgang ergibt sich zu:  $\underline{F} = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{\text{Ausgangsspannung}}{\text{Eingangsspannung}}$

$$\frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$|\underline{F}| = \frac{\text{Betrag(Zähler)}}{\text{Betrag(Nenner)}}$$

$$|\underline{F}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad (\text{Amplitudenkennlinie})$$

$$\angle_{\underline{F}} = \angle(\text{Zähler}) - \angle(\text{Nenner})$$

$$\angle_{\underline{F}} = 0^\circ - \arctan(\omega RC) \quad (\text{Phasenkennlinie})$$

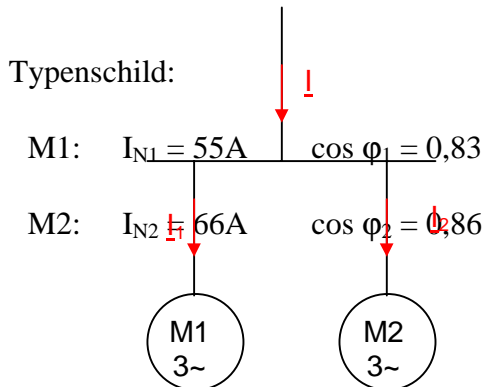
Zum Bode-Diagramm sei nur so viel gesagt:

Es besteht aus der Amplitudenkennlinie in doppelt log. Darstellung und der Phasenkennlinie in einfach log. Darstellung. Die Kennlinien verlaufen in diesem Fall bis zu der Eigenkreisfrequenz  $\omega_E$  waagrecht, Anschließend fällt die Amplitudenkennlinie mit negativer Steigung ab; die Phasenkennlinie wechselt von  $0^\circ$  auf  $-90^\circ$ .

Neben dem Tiefpass gibt es noch Hochpass, Bandpass und Bandfilter. Die Berechnung von Schaltungen mit mehreren dieser Elemente würde hier den Rahmen sprengen, sie lässt sich aber immer auf die Reihen- oder Parallelschaltung von Wirk- und Scheinwiderstand zurückführen.

Beispiel : Elektromotoren

Zwei Elektromotoren sind parallel geschaltet. Gesucht wird der Gesamtstrom  $\underline{I}$  in der Zuleitung.



Auf dem Typenschild des Motors finden sich u.a. der für den Betrieb nötige Strom (Nennstrom  $I_N$ ) und der Leistungsfaktor  $\cos \varphi$ .

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = 55A(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1) \quad \varphi_1 = \arccos 0,83 \quad \rightarrow \varphi_1 = 33,9^\circ$$

$$\underline{I}_2 = 66A(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) \quad \varphi_2 = \arccos 0,86 \quad \rightarrow \varphi_2 = 30,7^\circ$$

$$\rightarrow \underline{I} = 55A[\cos \varphi_1 + j \sin(\arccos 0,83)] + 66A[\cos \varphi_2 + j \sin(\arccos 0,86)]$$

$$\underline{I} = 55A(0,83 + j0,56) + 66A(0,86 + j0,51)$$

$$\underline{I} = 55A \cdot 0,83 + 66A \cdot 0,86 + j(55A \cdot 0,56 + 66A \cdot 0,51)$$

$$\underline{I} = 102,41A + j64,46A$$

$$\rightarrow \|\underline{I}\| = \sqrt{102,41^2 + 64,46^2}$$

$$\|\underline{I}\| = 121A$$

$$\varphi = \arctan \frac{64,46}{102,41}$$

$$\varphi = 32,2^\circ \quad \rightarrow \cos \varphi = 0,846$$

# Anhang

## Glossar

Auf Anfrage können dem Leser alle, ihm unbekannt, Begriffe erklärt werden.

## Quellen

[1] Klett „Themenheft Mathematik“

[2] Klett „Themenheft komplexere Zahlen“

[3] Harry Deutsch Verlag „Algebra und Geometrie der Ingenieure“

[4] Internet :

[www.uni-mannheim.de](http://www.uni-mannheim.de)

[www.uni-karlsruhe.de](http://www.uni-karlsruhe.de)